

Магистрант Өтебай Н.А., доцент Шоманбаева М.Т.

М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті

Гиперболалық теңдеулер үшін Коши есебін шешуге арналған сипаттамалар әдісі

Мақалада гиперболалық типтегі теңдеу үшін Коши есебінің шешімі қарастырылған. Бұл теңдеуді сипаттамалар әдісі арқылы шешуі көрсетілген. Физикадағы, әсіресе механикадағы көптеген мәселелер екінші ретті дербес дифференциалдық теңдеулерді зерттеуге әкеледі. Мысалы, толқындардың әртүрлі түрлерін: дыбыстық, электромагниттік және басқа тербеліс құбылыстарын зерттеген кезде олар толқындық теңдеуге келеді

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t),$$

мұндағы $u = u(x, y, z, t)$, a - берілген ортадағы толқындардың таралу жылдамдығы. Бір өлшемді жағдайда бұл теңдеу мына форманы алады

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

бұл біртекті ішектің мәжбүрлі тербелістерінің теңдеуі [1].

Бір өлшемді жағдайда [2] ішек теңдеуін қарастырайық:

$$e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0. \quad (1)$$

Коши есебі: Берілген теңдеудің бастапқы шарттарын қанағаттандыратын $u(x, y)$ шешімін табу:

$$u(x, y)|_{y=0} = -\frac{x^2}{2}, \quad (2)$$

$$u_y(x, y)|_{y=0} = -\sin x. \quad (3)$$

Ішек теңдеуі үшін Коши есебі - бұл үлкен ішектің тербелістерінің физикалық есебінің математикалық моделі, оның ұштарының әсері енді ішектің басқа нүктелерінің тербелістеріне әсер етпейді. Осы себептен бұл есепте шекаралық шарттар жоқ.

1-ші теңдеуді канондық түрге келтірейік. Ол үшін сипаттамалар теңдеуін құрамыз

$$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0,$$

мұндағы $A = 0, 2B = e^y, C = -1$. Есептейік $D = B^2 - AC = \frac{e^{2y}}{4} > 0$.

Сондықтан (1) теңдеу гиперболалық типтегі теңдеу болып табылады.

Бұл мәндерді сипаттамалар теңдеуіне ауыстыра отырып, біз мынаны табамыз:

$$e^y dy dx + (dx)^2 = 0.$$

dx -ті жақшадан тыс шығарып, біз мынаны аламыз:

$$dx(e^y dy + dx) = 0. \quad (4)$$

Бұл теңдеудің шешімі бар

$$dx = 0,$$

$$\int dx = 0,$$

$$x = C_1.$$

Және

$$e^y dy + dx = 0,$$

$$e^y dy = -dx,$$

$$\int e^y dy = - \int dx,$$

$$e^y = -x + C_2,$$

$$e^y + x = C_2.$$

Теңдеулерді шешкен кезде біз мынаны алдық:

$$x = C_1 = \text{const}, e^y + x = C_2 = \text{const}. \quad (5)$$

(5) теңдеулермен берілген түзулер ішек теңдеуінің нақты сипаттамаларының екі тобын білдіреді. Жаңа айнымалыларды енгізейік

$$\xi = x, \eta = e^y + x$$

және u функцияның u, u_{yy}, u_{xy} туындыларын жаңа айнымалыларға қатысты және күрделі функцияны дифференциалдау туралы теоремаларды қолдана отырып есептейміз [3]:

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = e^y u_\eta,$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_{\xi}\xi_{yy} + u_{\eta}\eta_{yy} = u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_{\eta}\eta_{yy} = \\ = (e^y)^2 u_{\eta\eta} + e^y u_{\eta},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_{\xi}\xi_{xy} + u_{\eta}\eta_{xy} = e^y u_{\xi\eta} + e^y u_{\eta\eta}.$$

Осы туындыларды (1) теңдеуге қойып, мынаны аламыз:

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Сипаттамалық координаталардағы гиперболалық типті теңдеудің жалпы шешімі келесі түрге ие:

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Жоғарыда келтірілген формула бойынша (1) теңдеудің түзу сызықты координаттардағы жалпы шешімін табу үшін алғашқы x және y айнымалыларына жүгінеміз:

$$u(x, y) = f(x) + g(e^y + x). \quad (6)$$

Біз (6) жалпы шешім негізінде (1) - (3) есептің шешімін құрамыз. (6) функциясын бастапқы шарттары (2) және (3) қанағаттандыру арқылы ерікті f және g функцияларын табамыз:

$$u(x, y)|_{y=0} = -\frac{x^2}{2}, \quad u_y(x, y)|_{y=0} = -\sin x.$$

Осылайша, белгісіз $f(x)$ және $g(x)$ функцияларын табу үшін функционалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} f(x) + g(x+1) = -\frac{x^2}{2}, \\ g'(x+1) = -\sin x \end{cases} \quad (7)$$

(7) жүйенің әр теңдеуінде біз $x+1$ айнымалысын s -ке ауыстырамыз және s бойынша интегралдаймыз. Содан кейін (7) жүйе келесі түрге ие болады:

$$\begin{cases} f(s-1) + g(s) = -\frac{(s-1)^2}{2}, \\ g'(s) = -\sin(s-1) \end{cases}.$$

Жүйенің екінші теңдеуін интегралдап, аламыз:

$$g(s) = \cos(1-s) + C.$$

Жүйенің бірінші теңдеуіне $g(s)$ өрнегінің мәнін қойып шығамыз:

$$f(s-1) = -\frac{(s-1)^2}{2} - \cos(1-s) - C.$$

Табылған функциялардағы s -ді $x + 1$ -ге ауыстырайық:

$$g(x + 1) = \cos x + C,$$

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} - \cos x - C.$$

Табылған $f(x)$ және $g(x + 1)$ функцияларын (6) формулаға қойамыз

$$u(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \cos x - C + \cos(e^y + x - 1) + C.$$

Сонымен (1) теңдеудің шешімі бар:

$$u(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \cos x - C + \cos(e^y + x - 1) + C. \quad (8)$$

(2) және (3) бастапқы шарттарды тексерейік. (8)-ші формулада $y = 0$ деп алайық, сонда болады

$$u(x, y)|_{y=0} = -\frac{x^2}{2},$$

сондықтан (2) шарт қанағаттандырылады. (3)-ші шартты тексерейік. Ол үшін (8) функцияның y -ке қатысты туындысын табамыз:

$$u_y = -e^y \sin(e^y + x - 1).$$

Демек, $y = 0$ деп алып мынаған келеміз:

$$u_y(x, y)|_{y=0} = -\sin x.$$

Сонымен, (3) шартта қанағаттандырылады. Сонымен, ішек теңдеу үшін Коши есебінің шешімі болуы негізделген.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Владимиров В. С., Жариков В. В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000.
2. Захаров Е. В., Дмитриева И. В., Орлик С. И. Уравнение математической физики. – М.: Изд-во Академия, 2010.- 320с.
3. Ильин А. М. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2009.- 192с.