

## Интегралдық түрлендіру әдісі

$f(t)$  функциясының интегралдық түрлендірулері сызықтық дифференциалдық теңдеулерді шешудің кең тараған әдістерінің бірі болып табылады. Жалпы формада  $f(t)$  функциясының интегралдық түрленуі формуламен анықталады

$$F(s) = \int_a^b K(s, t) dt, \quad (1)$$

мұндағы  $K(s, t)$  функциясы түрлендірудің ядросы деп аталады.  $F(s)$  функциясы  $f(t)$  функциясының кескіні немесе түрлендіруі деп аталады. Есептер шығаруда қолданылатын әр түрлі интегралдық түрлендірулердің ішінен біз екеуін қарастырамыз: Лаплас түрлендіруі мен Фурье түрлендіруін.

Осы әдістерді қолданудың математикалық негіздемесін және олардың қасиеттерін [1-2]-де табуға болады. Қарастырылып отырған түрлендірулерге арналған кең анықтамалық кестелер [3]-да келтірілген.

### 1. Дербес дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін Лаплас түрлендіруін қолдану

(1) формуламен анықталған Лаплас түрлендіруі мына формуламен беріледі

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Белгісіз  $u(x, t)$  функцияға қатысты сызықтық дербес дифференциалдық теңдеу болсын. Егер Лаплас түрлендіруін  $t$  айнымалыға қолдансақ, онда  $u(x, t)$  функцияның  $U(x, p)$  кескіні үшін қарапайым дифференциалдық теңдеуге келеміз. Содан кейін, алынған теңдеудің жалпы шешіміне бастапқы есептің шекаралық шарттары қойылады. Соңында, ізделінген  $u(x, t)$  шешім Лапластың кері түрлендіруі арқылы табылады. Шектелген облыста шекаралық есептерді шешуге Лаплас түрлендіруін қолдану ыңғайлы.

**Мысал 1.** Біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуі үшін қойылатын шекаралық есепті шешу.

Жылуөткізгіштік теңдеуі үшін қойылатын шекаралық есепті қарастырайық:

$$u_t = a^2 u_{xx}, x \in (0, L), t > 0$$

теңдеуінің

$$u(0, t) = 0, u(L, t) = \mu(t), t > 0, u(x, 0) = 0, x \in (0, L)$$

бастапқы және шекаралық шарттары берілсін.

$u(x, 0) = 0$  бастапқы шартпен Лаплас түрлендіруін қолданып  $a^2 U_{xx}(x, p) - pU(x, p) = 0$  жаңа теңдеуге келеміз, оның жалпы шешімі мына түрде беріледі

$$U(x, p) = A \operatorname{ch}(x\sqrt{p}/a) + B \operatorname{sh}(x\sqrt{p}/a) \quad (2)$$

$U(0, p) = 0, U(L, p) = \Phi(p)$  шекаралық шарттармен, мұндағы  $U(x, p)$  -  $u(x, t)$  функцияның бейнесі, және  $\Phi(p)$  -  $\mu(t)$  функцияның бейнесі болып табылады. Осы шекаралық шарттарды ескере отырып, біз (2)-ші теңдеудің дербес шешімін табамыз

$$U(x, p) = \Phi(p) \frac{\operatorname{sh}(x\sqrt{p}/a)}{\operatorname{sh}(L\sqrt{p}/a)}$$

Лапластың кері түрлендіруін қолданып мына шешімге келеміз:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Phi(p) e^{pt} \frac{\operatorname{sh}(x\sqrt{p}/a)}{\operatorname{sh}(L\sqrt{p}/a)} dp. \quad (3)$$

Қалдықтарды пайдаланып интегралды есептейміз. Интегралдың полюстері

$$\operatorname{sh}(L\sqrt{p}/a) = 0 \text{ теңдеуден анықталады және } p_n = -\left(\frac{\pi n a}{L}\right)^2, n \in \mathbb{Z} \text{ тең.}$$

$p = 0$  нүктедегі қалдық нөлге тең, ал  $p = p_0$  нүктеде ол

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \Phi(p) e^{pt} \frac{\operatorname{sh}(x\sqrt{p}/a)}{\operatorname{sh}(L\sqrt{p}/a)} = -\frac{2n\pi a^2}{L^2} \frac{\Phi(-\pi^2 n^2 a^2 / L^2)}{\cos(i\pi n)} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) e^{-\pi^2 n^2 a^2 t / L^2}$$

$\Phi(p)$  функцияны интегралдау контурын жабатын радиусы шексіз үлкен  $\operatorname{Re} p > \gamma$  жартылай шеңбердің ішіндегі интеграл нөлге ұмтылады деп есептесек, қалдық теоремасы бойынша

$$u_n(x, t) = (-1)^n \frac{2n\pi a^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \Phi\left(-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{L^2}\right) e^{-\pi^2 n^2 a^2 t / L^2}, n \in \mathbb{N}.$$

және, демек, мәселені шешу формасы болады

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n\pi a^2}{L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Phi\left(-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{L^2}\right) e^{-\pi^2 n^2 a^2 t/L^2}.$$

**Мысал 2.** Біртекті емес толқын теңдеуі үшін қойылатын шекаралық есепті шешу. Біртекті емес толқын теңдеуіне қойылатын бастапқы есепті қарастырайық:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \cos \omega t, \quad x \in (0, \infty), \quad t > 0,$$

теңдеуінің

$$u(x, 0) = 0, \quad u_x(x, 0) = u(x, 0) = 0,$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын  $x \rightarrow \infty$  ұмтылғанда  $u(x, t)$  шектеулі шешімін табу керек.

Бастапқы шарттарды қолдана отырып Лаплас түрлендірумен қолданамыз:

$$c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - p^2 U(x, p) = -\frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Жалпы шешімін табамыз

$$U(x, p) = A e^{px/c} + B e^{-px/c} + \frac{1}{p} \frac{c^2}{p^2 + \omega^2}.$$

$x \rightarrow \infty$  ұмтылғандағы шешімнің шектеулі шартынан  $A = 0$  дегенін табамыз, ал  $U(0, p) = 0$  шарттан  $B$  константаны табамыз, нәтижесінде мына дербес шешіміне келеміз

$$U(x, p) = \frac{1}{p} \frac{c^2}{p^2 + \omega^2} (1 - e^{-px/c}).$$

Лапластың кері түрлендіруін қолдана отырып, біз есептің шешімін табамыз

$$u(x, t) = \frac{c^2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) - \frac{c^2}{\omega^2} (1 - \cos \omega(t - x/c)) \eta(t - x/c),$$

мұнда  $\eta$  - Хевисайд функциясы.

**2. Дербес дифференциалдық теңдеулерді шешу үшін Фурье түрлендіруін қолдану**

Фурье түрлендіруі келесі формуламен беріледі

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx. \quad (4)$$

ал кері түрлендіру (5)-ші формула бойынша жүреді

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} d\omega . \quad (5)$$

Осы жалпы (күрделі немесе экспоненциалды) түрлендіруден басқа Фурье түрлендірулер қолданылады:

косинус Фурье түрлендіруі

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x d\omega . \quad (6)$$

және синус Фурье түрлендіруі

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega x d\omega . \quad (7)$$

Фурье түрлендіруі - ғылым мен инженерлік практиканың көптеген салаларында қолданылатын ең кең тараған әдіс. Бұл түрлендіру көбінесе шексіз немесе жартылай шексіз аудандарда есептер шығарғанда қолданылады. Оның қолданылуын келесі мысалдарда қарастырайық.

**Мысал 3.** Жылулық  $x \in (-\infty, \infty)$  шексіз ортада таралсын. Температураның  $f(x)$  бастапқы таралуы белгілі. Жылу көздері жоқ. Уақыттың ерікті моментіндегі температураның таралуын табыңыз.

Жылу өткізгіштік теңдеуін  $u_t = a^2 u_{xx}$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ ,  $t > 0$ , бастапқы  $u(x, 0) = f(x)$  шартпен жазамыз. Шексіздікте келесі шарттар орындалуы керек

$$u(x, t) \rightarrow 0, \quad u_x(x, t) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty.$$

Фурье түрлендіруін (4)-ші теңдеуге қолданамыз. Шексіздіктегі шарттарын ескере отырып, біз мына теңдеуге келеміз

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a^2 \omega^2 U(\omega, t) = 0 \quad (8)$$

мұндағы  $U(\omega, t)$  -  $u(x, t)$  функцияның Фурье түрлендіруі. Бастапқы шарттың түрлендіруі мына қатынасқа әкеледі  $U(\omega, t) = F(\omega)$ ,  $\omega \in (-\infty, \infty)$ ; бұл жерде  $F(\omega)$  -  $f(x)$  функцияның Фурье бейнесі. Түрлендірілген бастапқы шартты ескере отырып, (8)-ші теңдеудің жалпы шешімі былай жазылады

$$U(\omega, t) = F(\omega) e^{-a^2 \omega^2 t}. \quad (9)$$

(9)-ші теңдеуге кері (5) түрлендіруді қолданып  $u(x, t)$  табамыз:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega x - a^2 \omega^2 t} d\omega \quad (10)$$

(10) есептеу үшін интегралын қолданамыз [1]. Содан кейін

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x - a^2 \omega^2 t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{2a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

және конволюция теоремасы бойынша табамыз

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) g(x - \omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \frac{1}{\sqrt{2a^2 t}} e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4a^2 t}} d\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4a^2 t}} d\omega . \end{aligned}$$

Келесі белгілеуді енгізіп

$$z = \frac{x - \omega}{\sqrt{4a^2 t}},$$

біз есептің соңғы шешімін жазамыз

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x + z\sqrt{4a^2 t}\right) e^{-z^2} dz .$$

Интегралдық түрлендірулер - математикалық физиканың теңдеулерді шешудің қуатты құралы. Бұл түрлендірулер көп жағдайда дербес дифференциалдық теңдеулерді кәдімгі дифференциалдық теңдеуге келтіруге немесе жалпы жағдайда теңдеудегі туындылар алынатын айнымалылар санын азайтады.

## ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 4, ч. 2. – М.: Наука, 1981.
3. Бейтмен Г., Эрдеи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. – М.: Наука, 1969.