К.ф.-м.н. Шоманбаева М.Т., магистрант Нарбаев Т.Ш.

Южно-Казахстанский университет им. Ауэзова, город Шымкент

О сильной разрешимости задачи Коши-Неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом

Теория дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом принадлежит к числу сравнительно молодых и бурно развивающихся разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Этой теории и ее многообразным приложениям посвящено большое количество журнальных статей. Имеется также ряд монографий, целиком или частично посвященных различным аспектам этой теории. Укажем прежде всего монографии А.Д. Мышкиса [1], Л.Э. Эльсгольца [2], Н.Н. Красовского [3], С.Б. Норкина [4]. Также следует отметить работы Нерсесяна А.Б. [5], Кальменова Т.Ш. [6].

Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$- четырехугольник, ограниченный отрезками:
$AB: 0 \le t \le T,\, x = 0;\, BC: 0 \le x \le l,\, t = T;\, CD: 0 \le t \le T,\, x = l;\, DA: 0 \le x \le l,\, t = 0.$ (см. рис.1). Через $C^{2,1}(\Omega)$- обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

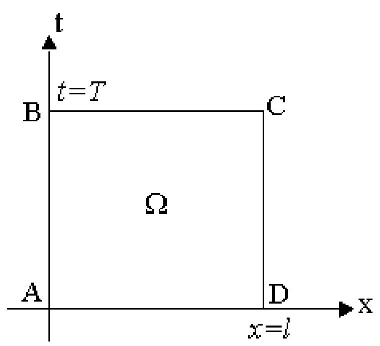

Рис.1.

Задача Коши-Неймана. Найти решение уравнения

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t)\,, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u\big|_{t=0} = u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0\,. \tag{2}$$

Определение 1. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением задачи*, если существует последовательность функций $\{u_n\} \in C^{2,1}(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяющих краевым условиям задачи такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$ сходятся в $L_2(\Omega)$ соответственно к u и f.

Определение 2. Краевая задача (1) - (2) называется *сильно разрешимой*, если сильное решение задачи существует для любой правой части $f(x,t) \in L_2(\Omega)$ и единственно.

Целью настоящей работы является исследование сильной разрешимости краевой задачи (1)-(2) в пространстве $L_2(\Omega)$.

Уравнение (1) не является чисто дифференциальным, поэтому краевая задача (1) - (2) относится к числу неклассических задач математической физики.

Для решения краевой задачи (1) - (2) применяем методы функционального анализа, особенно, теории линейных операторов, а также метод Фурье.

Теорема 1. Спектральная задача

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = \lambda u(x,t), \tag{3}$$

$$u\big|_{t=0} = u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0\,. \tag{4}$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, ..., \; m = 0, 1, 2, ... \tag{5}$$

и соответствующих им собственных функций

$$u_{mn}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \cos\frac{m\pi}{l} x \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T}; \quad m, n = 0, 1, 2, ... \tag{6}$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L_2(\Omega)$, где $\Omega = [0,l]x[0,T]$.

Теорема 2. Для существования и единственности сильного решения краевой задачи

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{7}$$

$$u\big|_{t=0} = u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0. \tag{8}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{m^2}, \quad n = 0, 1, 2, ..., m = 1, 2, ... \tag{9}$$

При выполнении этого условия сильное решение задачи существует и имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}(x,t) \tag{10}$$

для всех $f(x,t) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}}\right|^2 < +\infty, \tag{11}$$

где

$$\lambda_{mn} = (-1)^n\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2, \; m, n = 0, 1, 2, ... \tag{12}$$

$$u_{mn}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}}\cos\frac{m\pi}{l}x \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T}; \quad m, n = 0, 1, 2, ... \tag{13}$$

Теорема 3. Оператор

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t),$$

$$u\big|_{t=0} = u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0.$$

самосопряжен в существенном в пространстве $H = L_2(\Omega)$, где $\Omega = [0,l]x[0,T]$ - прямоугольник, лежащий на верхней полуплоскости $(x,t) \in R^2$.

Из теорем 2 и 3 следует следующая теорема.

Теорема 4. Если $\forall\, n, n = 0,1, \dots;\; m = 1,2, \dots \dots,$

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{m^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, m = 1, 2, \ldots$$

то существует обратный оператор L^{-1}, который также самосопряжен.

Вследствие отклонения аргумента появляется спектр, поэтому появилась возможность использовать спектральную теорию линейных операторов.

Литература:

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.-Л., Гостехиздат, 1951.
2. Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., Наука, 1964.
3. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
4. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. –М.: Наука, 1965.
5. Нерсесян А.Б. Разложение по собственным функциям интегро-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. // ДАН СССР, 129, 3 (1959), 511-514.
6. Кальменов Т.Ш. Спектральные свойства краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. // Автоматизированные системы и родственные проблемы анализа. Сб. науч. тр. – Нальчик, 1989. С. 146-149.