Аспирант Белоцерковская А.И.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина

К синтезу парциальных функций открытой продольно-неоднородной электродинамической системы

A new method for numerical simulation of time-dependent potentials in nonlinear electrodynamic systems of the optical quantum generators with irregular longitudinal dependencies of their electrodynamic parameters (dispersion characteristics, attenuations, etc.) is considered. This is founded on the decomposition of electromagnetic potentials of the electrodynamic line in its partial modes. The longitudinal localization of those modes ensures dependence of their spatial structures and electrodynamic parameters on the physical characteristics of a finite longitudinal part of the line. The suggested method may be used for the optimization and design of new quantum devices.

Теория и техника оптических квантовых генераторов (ОКГ) в настоящее время интенсивно развиваются как в связи с военными потребностями, так и с общегражданскими. В докладе рассмотрены методика и предварительные результаты моделирования электродинамических процессов в открытых оптических резонаторах ОКГ [1] путём декомпозиции нестационарных электромагнитных потенциалов в так называемые парциальные моды протяжённой электродинамической системы (ЭС) [2]. Особенностью данной декомпозиции является существенная продольная локализация базисных функций, которая даёт преимущество независимости их пространственной структуры и электродинамических параметров от свойств отдалённых участков ЭС. Это делает возможным практическое использование предложенной методики для расчёта продольно-неоднородных ЭС. Достаточная точность результатов может быть достигнута с ограниченным числом парциальных мод, учитываемых в рядах декомпозиции.

Известно, что общим методом расчёта электромагнитных потенциалов вынужденных колебаний с произвольным спектром в протяжённых нелинейных ЭС (например, заполненных активной средой) является прямой численный метод решения неоднородных волновых уравнений в объёме с заданными геометрическими и самосогласованными электрофизическими параметрами. Однако наличие открытых границ в ЭС субмиллиметрового и оптического диапазонов зачастую делает такие методы нерациональными с точки зрения потребления вычислительных ресурсов. В качестве альтернативы можно предложить декомпозицию полей по парциальным функциям ЭС [2].

Вектор-столбец из N парциальных функций ЭС $\vec{\mathbf{A}}_p(x,y,z)$, наряду с вектором-столбцом из такого же количества её нормальных мод $\vec{\mathbf{A}}_e(x,y,z)$, определяются как нетривиальные решения матричного уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2\vec{\mathbf{A}}_{p,e} + \mathbf{k}^2_{p,e}\vec{\mathbf{A}}_{p,e} = 0 \qquad (1)$$

в объёме ЭС с однородными либо периодическими граничными условиями (ГУ). Матрица $\mathbf{k}^2_{p,e}$ – эрмитова матрица квадратов волновых чисел размером $N \times N$, для нормальных мод имеющая диагональную форму и содержащая квадраты собственных волновых чисел. Решение волнового уравнения для потенциалов ЭС $\vec{A}(x,y,z,t)$ находится как ряд в гильбертовом функциональном пространстве мод L^2 (для нормальных мод это ряд Фурье) с коэффициентами в виде произвольных функций времени:

$$\vec{A} = \vec{\mathbf{A}}_{p,e} \cdot \mathbf{u}_{p,e}\,, \qquad (2)$$

где $\mathbf{u}_p(t)$ и $\mathbf{u}_e(t)$ – векторы-столбцы из N мгновенных значений соответственно парциальных и нормальных мод; точка означает их скалярное произведение.

Векторы нормальных и парциальных мод по определению связаны между собой соотношениями:

$$\vec{\mathbf{A}}_e = \mathbf{F}\vec{\mathbf{A}}_p\,; \qquad \vec{\mathbf{A}}_p = \mathbf{F}^{-1}\vec{\mathbf{A}}_e\,, \qquad (3)$$

где $\mathbf{F}$ – вещественная матрица формы нормальных мод размером $N \times N$. Верхний индекс (–1) означает обращение матрицы. Для ЭС с распределёнными параметрами матрица формы не определяется конструкцией системы, а задается априори и может быть, вообще говоря, произвольной невырожденной. Однако практический интерес представляют лишь матрицы, обеспечивающие локализацию в продольном направлении всех парциальных мод (т.е. достаточно быстрое ослабление потенциала каждой моды при удалении в обе стороны от ее максимума). Например, для замкнутой в кольцо ЭС и четного N таковой является матрица:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \cos\Delta\varphi_1 & \cos 2\Delta\varphi_1 & \ldots & N-1)\Delta\varphi_1 \\ 1 & \cos\Delta\varphi_2 & \cos 2\Delta\varphi_2 & \ldots & N-1)\Delta\varphi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & -1 & 1 & \ldots & 1)^{N-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \sin\Delta\varphi_2 & \sin 2\Delta\varphi_2 & \ldots & -1)\Delta\varphi_2 \\ 0 & \sin\Delta\varphi_1 & \sin 2\Delta\varphi_1 & \ldots & -1)\Delta\varphi_1 \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

где $\Delta\varphi_m = 2\pi m / N$ – изменение фазы m-й нормальной моды ($m = 0, 1, \ldots, N/2$) между двумя соседними парциальными модами. В ЭС с иными ГУ матрица $\mathbf{F}$ может быть построена исходя из физических соображений.

С физической точки зрения n-ю парциальную моду ($n = 0, 1, \ldots, N–1$) ЭС с распределёнными параметрами можно интерпретировать в виде «облака» потенциала, колеблющегося как единое целое, т.е. в одинаковой фазе $\varphi_n = n\Delta\varphi_m$ (предполагается, что возбуждена только m-я нормальная мода). Заметим, что $\Delta\varphi_m$ – постоянная величина, независимо от того, регулярна ЭС или нет. Такая интерпретация парциальных мод позволяет применить к ним теорию колебательных систем с сосредоточенными параметрами с конечным числом степеней свободы [3], полагая, что вектор $\mathbf{u}_p$ содержит N независимых обобщённых координат. Например, имеют место соотношения:

$$\mathbf{u}_e = \left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T \mathbf{u}_p; \qquad \mathbf{u}_p = \mathbf{F}^T \mathbf{u}_e;$$

$$\mathbf{k}_e^2 = \mathbf{F}\mathbf{k}_p^2\mathbf{F}^{-1}; \qquad \mathbf{k}_p^2 = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{k}_e^2\mathbf{F} \text{ и т.п.}$$

При надлежащем выборе матрицы формы удаётся существенно регуляризировать набор парциальных функций для любой продольно-неоднородной ЭС, что соответственно уменьшает расход вычислительных ресурсов. Рассмотрим в качестве примера продольно-неоднородную систему с однородными ГУ на обоих концах и продольной зависимостью продольного волнового числа $k_m(z)$ для m-й нормальной моды в виде

$$k_m(z) = \frac{\pi m}{\Delta Z}\left[1-(1-m/N)(1-2z/\Delta Z)\right], \tag{5}$$

где ΔZ – длина ЭС. Когда парциальные моды такой ЭС синтезируются с помощью «регулярной» матрицы формы, продольная локализация их выходит крайне слабой (рис. 1). Если же использовать специальный вид матрицы:

$$F_{mn} = \sin\frac{\pi mn}{N}\left[1-(1-m/N)(1-n/N)\right] \text{ –} \tag{6}$$

можно добиться существенной локализации парциальных мод (рис. 2).

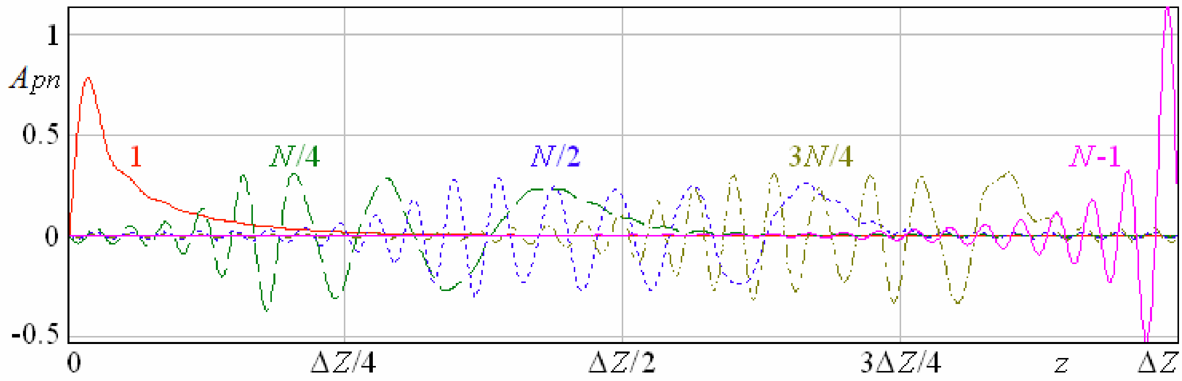

Рисунок 1. Нерегуляризованные парциальные моды продольно-неоднородной ЭС

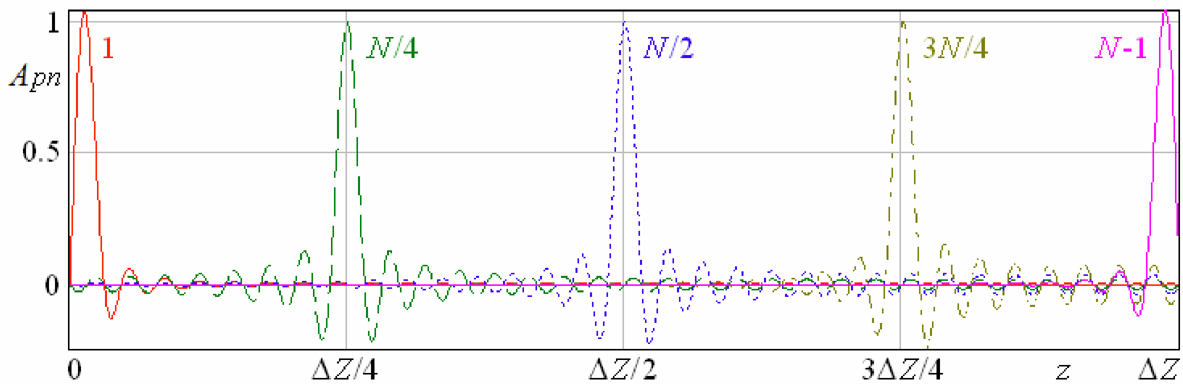

Рисунок 2. Парциальные моды той же ЭС с соответствующей матрицей формы

Таким образом, расчёт нестационарных электромагнитных потенциалов открытых оптических резонаторов с финитным пространственно-временным спектром путём их декомпозиции в продольно локализованные линейно-независимые линейные комбинации собственных функций ЭС (парциальные моды) в ряде случаев имеет достоинства по сравнению с разложением их по самим собственным функциям (нормальным модам). Данная методика является достаточно надёжной; её можно эффективно использовать в областях ЭС с нерегулярными по длине параметрами. Кроме того, метод Фурье, обычно используемый для решения внутренних краевых задач, где набор собственных функций дискретен, может быть распространён на предельные задачи (с континуальным пространством собственных функций). В этом случае спектр синтезируемых потенциалов оказывается непрерывным при сохранении дискретности самих мод.

Разработанную методику целесообразно применять на практике как составную часть алгоритмов анализа и синтеза активных и пассивных устройств квантовой электроники и оптоэлектроники. Развитием её может быть декомпозиция потенциалов ЭС в поперечных направлениях с использованием базиса так называемых парциальных функций [4].

Литература

1. Радина, Т. В., А. Ф. Станкевич. Резонансные и параметрические явления в задачах генерации и распространения лазерного излучения. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. – 231 с.

2. Грицунов, А. В. Методы расчета нестационарных негармонических полей в направляющих электродинамических системах // Радиотехника и электроника, 2007, т. 52, № 6, с. 645-661.

3. Стрелков, С. П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. – 440 с.

4. Грицунов, А. В. Разложение нестационарных электромагнитных потенциалов по парциальным функциям электродинамической системы // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника, 2006, т. 49, № 7, с. 10-20.