УДК 539.384

Гостева О.А., Никоноров А.Е., к.ф.-м.н. Есенбаева Г.А.

Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова,

Караганда, Казахстан

Расчет изгиба пластины с заданными граничными условиями методом Леви

Рассмотрим случай изгиба прямоугольной пластины в общем виде, а именно, для любого вида внешней нагрузки *f*. Два противоположных края пластины (например, $x=0$ и $x=a$) имеют шарнирное опирание. Свободной является сторона $y=0$, а сторона $y=b$ является жестко закрепленной, тогда граничные условия запишутся в виде

$$\left.\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\left[\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}\right]\right|_{y=0}=0\,; \tag{1}$$

$$W\big|_{y=b}=0\,,\qquad \left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=b}=0\,. \tag{2}$$

Искомую функцию прогибов $W(x,y)$ пластины ищем в виде [1]

$$W(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\sin\omega_n x\,, \tag{3}$$

где $Y_n=Y_n(y)$ - неизвестная функция, которая выбирается так, чтобы выражение (4) удовлетворяло разрешающему уравнению С. Жермен [2]

$$D\Delta\Delta W=f(x,y) \tag{4}$$

и граничным условиям на кромках $y=0$ и $y=b$.

При подстановке (3) в (4) получим дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид

$$Y_n(y)=A_n\cdot ch\omega_n y+B_n\cdot sh\omega_n y+C_n\cdot y\cdot ch\omega_n y+D_n\cdot y\cdot sh\omega_n y+\varphi_n(y)\,, \tag{5}$$

где A_n,B_n,C_n,D_n произвольные постоянные интегрирования, а φ_n - частный интеграл, зависящий от вида f_n и, следовательно, от заданной внешней нагрузки f.

Из граничных условий (1), (2) с учетом (3) и (5) получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n

$$A_n\left[ch\omega_n b-\frac{1-\nu}{2}\omega_n b sh\omega_n b\right]+B_n\left[\frac{1-\nu}{1+\nu}\omega_n b ch\omega_n b+sh\omega_n b\right]=g_1,$$

$$\frac{A_n}{2}\left[-(1-\nu)\omega_n^2 b ch\omega_n b+(1+\nu)\omega_n sh\omega_n b\right]+\frac{B_n}{1+\nu}\left[2\omega_n ch\omega_n b+(1-\nu)\omega_n^2 b sh\omega_n b\right]=g_2,$$

$$-\frac{1-\nu}{1+\nu}\omega_n\cdot B_n+C_n=g_3,$$

$$\frac{1-\nu}{2}\omega_n\cdot A_n+D_n=g_4,$$

где

$$g_1=-b\cdot(ch\omega_n b\cdot g_3+sh\omega_n b\cdot g_4)-\varphi_n(b),$$

$$g_2=-(ch\omega_n b+b\omega_n sh\omega_n b)\cdot g_3-(sh\omega_n b+b\omega_n ch\omega_n b)\cdot g_4-\varphi_n'(b).$$

$$g_3=\frac{1}{(1+\nu)\omega_n^2}\left[(2-\nu)\omega_n^2\varphi_n'(0)-\varphi_n'''(0)\right],$$

$$g_4=\frac{1}{2\omega_n}\left[\nu\omega_n^2\varphi_n(0)-\varphi_n''(0)\right].$$

Из полученной системы уравнений находим аналитические выражения для коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n

$$A_n=2\frac{\left[2g_3-(1-\nu)bg_4\right]ch\omega_n b+\left[(1-\nu)\omega_n bg_3-\frac{1+\nu}{\omega_n}g_4\right]sh\omega_n b}{[4+(1-\nu)^2\omega_n^2b^2]ch^2\omega_n b-[(1-\nu)^2\omega_n^2b^2+\nu+1]sh^2\omega_n b},$$

$$B_n=(1+\nu)\frac{\left[(1-\nu)\omega_n bg_3+\frac{2}{\omega_n}g_4\right]ch\omega_n b-\left[(1+\nu)g_3+(1-\nu)bg_4\right]sh\omega_n b}{[4+(1-\nu)^2\omega_n^2b^2]ch^2\omega_n b-[(1-\nu)^2\omega_n^2b^2+\nu+1]sh^2\omega_n b},\tag{6}$$

$$C_n=g_2+(1-\nu)\omega_n\frac{\left[(1-\nu)\omega_n bg_3+\frac{2}{\omega_n}g_4\right]ch\omega_n b-\left[(1+\nu)g_3+(1-\nu)bg_4\right]sh\omega_n b}{[4+(1-\nu)^2\omega_n^2b^2]ch^2\omega_n b-[(1-\nu)^2\omega_n^2b^2+\nu+1]sh^2\omega_n b},$$

$$D_n=g_1-(1-\nu)\omega_n\frac{\left[2g_3-(1-\nu)bg_4\right]ch\omega_n b+\left[(1-\nu)\omega_n bg_3-\frac{1+\nu}{\omega_n}g_4\right]sh\omega_n b}{[4+(1-\nu)^2\omega_n^2b^2]ch^2\omega_n b-[(1-\nu)^2\omega_n^2b^2+\nu+1]sh^2\omega_n b},$$

В силу громоздкости формул для определения коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n в общем случае (6), а, следовательно, неудобства и трудоемкости их дальнейшего использования, рекомендуется все вычисления постоянных A_n, B_n, C_n, D_n проводить в каждом частном случае с заданными конкретными численными параметрами.

Подстановка найденных коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n в (5), (3) дает функцию прогибов пластины $W(x, y)$ и, следовательно, изгибающие и крутящий моменты, а также поперечные силы [3] в виде тригонометрических рядов.

Без всяких затруднений решение Леви может быть применено также к исследованию изгиба пластины, у которой стороны, параллельные оси x, имеют другие граничные условия. Решение Леви распространяется легко также на те случаи, когда стороны контура пластины, параллельные оси x, не вполне жестки, а представляют собой сравнительно гибкие балки, прогибающиеся под действием приходящихся на них давлений.

Решение Леви является в принципе более точным, чем решение Навье, так как в нем искомая функция $W(x, y)$ аппроксимируется с помощью тригонометрических функций только в одном направлении, а в другом направлении разыскивается точно из дифференциального уравнения (5).

Список литературы

1. Гоцелюк Т.Б., Матвеев К.А., Пель А.Н., Пустовой Н.В. Строительная механика машин. Поперечный изгиб пластин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. – 91 с.

2. Косауров А.П., Тимофеев П.В. Анализ и особенности методов при расчете пластин и оболочек на изгиб. - М.: Фонд «Основание», 2013. - 17 с.

3. Завьялов В.Н., Мартынов Е.А., Романовский В.М. Основы строительной механики пластин. - Омск, СибАДИ, 2012. - 116 с.