Комолов В. М., к. ф.-м. н. Латынин Ю. М.
Украинская инженерно-педагогическая академия, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт». г. Харьков

Построение комплексной функции $W_\nu^\mu(x)$ на основе функций Лежандра

Введение. В теории функций Лежандра существуют решения $\mathrm{P}_\nu^\mu(x), \mathrm{Q}_\nu^\mu(x),\ -1 < x < 1$ присоединенного уравнения Лежандра, которые называют функциями Ферерса [1−3]:

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(x) = \frac{1}{2}[e^{i\mu\cdot\pi/2}\cdot P_\nu^\mu(x+i0) + e^{-i\mu\cdot\pi/2}\cdot P_\nu^\mu(x-i0)]\,, \qquad (1)$$

$$\mathrm{Q}_\nu^\mu(x) = \frac{1}{2}[e^{-3\cdot i\mu\cdot\pi/2}\cdot Q_\nu^\mu(x+i0) + e^{-i\mu\cdot\pi/2}\cdot Q_\nu^\mu(x-i0)]\,. \qquad (2)$$

Здесь $P_\nu^\mu(x \pm i0), Q_\nu^\mu(x \pm i0)$ − функции Лежандра соответственно первого и второго рода. Отрезок на оси [−1, 1] часто называют «разрезом». Поведение функций $P_\nu^\mu(x+i0), P_\nu^\mu(x-i0)$ различно в зависимости от приближения к «разрезу»: снизу или сверху (через $f(x \pm i0)$ обозначен $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x \pm i\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$).

Равенства (1), (2) определяют $\mathrm{P}_\nu^\mu(x), \mathrm{Q}_\nu^\mu(x)$ для всех комбинаций μ; ν, исключая случаи $\mu + \nu = -1, -2, -3,..$, где ν – степень функции, а μ – ее порядок. Представим дополнение функций Ферерса (1, 2) комплексной функцией $W_\nu^\mu(x)$ – аналог функции Ангера, Вебера в теории бесселевых функций [2].

Основная часть. **1.** Преобразуем выражения функций Ферерса от отрицательного аргумента, используя уравнения связи [2]:

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(-x) = \mathrm{P}_\nu^\mu(x)\cdot \cos[(\nu+\mu)\pi] - \frac{2}{\pi}\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)\cdot \sin[(\nu+\mu)\pi]\,, \quad (3)$$

$$\mathrm{Q}_\nu^\mu(-x) = -\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)\cdot \cos\,[(\nu+\mu)\pi] - \frac{\pi}{2}\mathrm{P}_\nu^\mu(x)\cdot \sin\,[(\nu+\mu)\pi]. \quad (4)$$

Объединим уравнения (3,4) в одно: $-[W_\nu^\mu(-x)]^* = W_\nu^\mu(x)\cdot e^{-i(\nu+\mu)\pi}$. (5)

В (5) введена комплексная функция $W_\nu^\mu(x)$, в состав которой входят присоединенные функции Лежандра $2\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)/\pi;\ \mathrm{P}_\nu^\mu(x)$:

$$W_\nu^\mu(\pm x) = \frac{2}{\pi}\cdot \mathrm{Q}_\nu^\mu(\pm x) + i\cdot \mathrm{P}_\nu^\mu(\pm x); \tag{6}$$

При этом:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Q}_\nu^\mu(-x)/\pi &= -\left|W_\nu^\mu(x)\right|\cdot cos[(\nu+\mu)\pi-\psi], \\ \mathrm{P}_\nu^\mu(-x) &= -\left|W_\nu^\mu(x)\right|\cdot sin[(\nu+\mu)\pi-\psi], \end{aligned} \tag{7}$$

где $$\psi = arctg\frac{\mathrm{P}_\nu^\mu(x)}{\frac{2}{\pi}\cdot \mathrm{Q}_\nu^\mu(x)} . \tag{8}$$

Тогда $$arctg\frac{\mathrm{P}_\nu^\mu(-x)}{\frac{2}{\pi}\mathrm{Q}_\nu^\mu(-x)} + arctg\frac{\mathrm{P}_\nu^\mu(x)}{\frac{2}{\pi}\mathrm{Q}_\nu^\mu(x)} = (\nu+\mu)\pi . \tag{9}$$

Известны тригонометрические разложения на «разрезе» $-1< x < 1$ для функций $\mathrm{P}_\nu^\mu(cos\,\theta)$, $\mathrm{Q}_\nu^\mu(cos\,\theta)$ [2]:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_\nu^\mu(cos\,\theta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^{\mu+1}(sin\,\theta)^{\mu}\cdot\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+\mu)_k\cdot(\nu+\mu+1)_k}{k!\cdot(\nu+3/2)_\kappa}\times \\ &\times sin\,[(\nu+\mu+1+2\kappa)\,\theta]. \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}_\nu^\mu(cos\,\theta) &= \sqrt{\pi}\cdot 2^{\mu}(sin\,\theta)^{\mu}\,\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+\mu)_k\cdot(\nu+\mu+1)_k}{k!\cdot(\nu+3/2)_\kappa}\times \\ &\times cos\,[(\nu+\mu+1+2\kappa)\,\theta] . \end{aligned} \tag{11}$$

В (10), (11) $\Gamma(\nu+\mu+1)$, $\Gamma\,(\nu+3/2)$ − гамма функции; под знаком суммы выражение

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1)(a+2)...(a+k-1) . \tag{12}$$

Оба ряда в (10), (11) сходятся при $0<\theta<\pi$. Образуем

$$W_{\nu}^{\mu}(\cos\theta) = 2\cdot \mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)/\pi + i\cdot \mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta) =$$
$$= \frac{2^{\mu+1}}{\sqrt{\pi}}(\sin\theta)^{\mu}\cdot\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\cdot e^{i\cdot[\nu+\mu+1]\theta}\cdot F(\mu+\frac{1}{2},\ \nu+\mu+1;\ \nu+\frac{3}{2};\ e^{i\cdot 2\theta}). \tag{13}$$

В (13) $F(a, b; c; z)$ – гипергеометрический ряд от переменной $z = e^{i\cdot 2\theta}$ с параметрами: $a = \mu+1/2$, $b=\mu + \nu +1$, $c = \nu +3/2$,

$$F \equiv F(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu+1/2)_k\cdot(\nu+\mu+1)_k}{k!\cdot(\nu+3/2)_k}\cdot e^{i\cdot 2k\theta}\ . \tag{14}$$

$$\left|W_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)\right| = \frac{2^{\mu+1}}{\sqrt{\pi}}\cdot(\sin\theta)^{\mu}\cdot\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\cdot\sqrt{(Re F)^2+(Im F)^2}; \tag{15}$$

$$\arg W_{\nu}^{\mu}(\cos\theta) = arctg\frac{\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)}{\frac{2}{\pi}\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)} = (\nu+\mu+1)\theta +$$
$$+ arctg\left[\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu+1/2)_k\cdot(\nu+\mu+1)_k}{k!\cdot(\nu+3/2)_k}\cdot\sin(2k\theta)}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu+1/2)_k\cdot(\nu+\mu+1)_k}{k!\cdot(\nu+3/2)_k}\cdot\cos(2k\theta)}\right] = \tag{15′}$$
$$= (\nu+\mu+1)\cdot\theta + arctg\left[\frac{Im F(a,b;c;z)}{\mathrm{Re}\, F(a,b;c;z)}\right].$$

2. Асимптотическое разложение по параметру ν функций $\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)$, $\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)$ следующее [2]:

$$\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta) = (\frac{\pi}{2}\sin\theta)^{-1/2}\cdot\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\cdot\left\{\cos[(\nu+\frac{1}{2})\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{\mu\cdot\pi}{2}]+0\cdot(\nu^{-1})\right\} \tag{16}$$

$$\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta) = (\frac{\pi}{2\sin\theta})^{1/2}\cdot\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\cdot\left\{\cos[(\nu+\frac{1}{2})\theta+\frac{\pi}{4}+\frac{\mu\cdot\pi}{2}]+0\cdot(\nu^{-1})\right\}. \tag{17}$$

Эти разложения справедливы в области $\varepsilon \le \theta \le \pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

В этом случае возникают следующие соотношения:

$$W_{\nu}^{\mu}(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta) + i\cdot\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}}\cdot\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\cdot e^{i[(\nu+1/2)\theta+(2\mu+1)\pi/4]}; \tag{18}$$

$$\left|W_{\mu}^{\nu}(\cos\theta)\right| = \sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}}\cdot\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}. \tag{19}$$

$$\arg W_{\nu}^{\mu}(\cos\theta) = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)}{\frac{2}{\pi}\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(\cos\theta)} = \mathrm{arctg}\,[\frac{\cos(\chi-\pi/4)}{\cos(\chi+\pi/4)}] =$$
$$= \mathrm{arctg}\,[\frac{\sin(\chi+\pi/4)}{\cos(\chi+\pi/4)}] = \chi+\pi/4 = (\nu+1/2)\theta+(2\mu+1)\pi/4. \tag{20}$$

В (20) $\chi = (\nu + 1/2)\cdot\theta + \mu\cdot\pi/2$.

Заключение. Функции Лежандра первого и второго рода при произвольных параметрах ν, μ на интервале изменения аргумента $-1< x <1$ (функции Ферререса) объединены в единую комплексную функцию

$$W_{\nu}^{\mu}(x) = \sqrt{[\frac{2}{\pi}\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)]^2 + [\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)]^2}\cdot e^{i\cdot\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{P}_{\nu}^{\mu}(x)}{\frac{2}{\pi}\cdot\mathrm{Q}_{\nu}^{\mu}(x)}},$$

для которой получены выражения модуля $\left|W_{\nu}^{\mu}(x)\right|$ и аргумента $\arg W_{\nu}^{\mu}(x)$. Применение функции $W_{\nu}^{\mu}(x)$ позволит построить более компактные решения уравнения Лапласа в сферической и тороидальной системах координат.

Литература:

1. Уитеккер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Пер. с англ., М.: Физматгиз, т.2, 1963.– 515 с.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. т.I, 1973, т.II, 1974. Пер. с англ., М.: «Наука», Гл. ред. физ.- мат. литературы.

3. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. Пер. с англ., М.: «Наука», Гл. ред. физ.- мат. литературы, 1978. – 376 с.