

Магистрант Жусупбекова Г.Е., ғылыми жетекші - Ысмагул Р.С.,ф.-м.ғ.к.

А.Байтурсынов ат. Костанай өңірлік университеті, Қазақстан

ИНТЕГРАЛДЫҚ ТҮРЛЕНДІРУДІ ОПЕРАЦИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕУЛЕРГЕ ҚОЛДАНУ

Шарттарды қанағаттандыратын нақты айнымалы $f(t)$ функциясы берілсін:

$$1) f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t < 0; \\ f(t) & t \geq 0 \end{cases};$$

2) $f(t)$ функциясы үздіксіз (бірінші типтегі үзіліс нүктелерінің соңғы саны бар);

3) $t > 0$ параметрінің кез-келген мәні үшін $M > 0$ және $S_0 > 0$ сандары табылады және мына шарт орындалады: $|f(t)| < Me^{S_0 t}$.

$f(t)e^{-pt}$, функциясын қарастырамыз, мұндағы p –кешенді сан, $p = (a + i b)$.

$$f(t) \cdot e^{-pt} = f(t)e^{-(a+ib)t} = f(t)e^{-at} f(t)e^{-ibt}$$

Эйлер формуласын осы өрнекке қолданамыз :

$$f(t)e^{-pt} = f(t)e^{-at} (\cos bt + i \sin bt)$$

Бұл теңдікті интегралдау арқылы біз мына интегралды аламыз:

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-at} \cos btdt + i \int_0^{\infty} f(t)e^{-at} \sin btdt \quad (*)$$

(*) теңдіктің сол жағын бағалаласақ:

$$\left| \int_0^{\infty} f(t)e^{-at} \cos btdt \right| \leq \int_0^{\infty} f(t)e^{-at} \cos btdt = \int_0^{\infty} |f(t)| \cdot |e^{-at}| \cdot |\cos bt| dt \leq \int_0^{\infty} Me^{st} e^{-at} dt ,$$

3) шартқа $|f(t)| < Me^{S_0 t}$ сәйкес

$$M \int_0^{\infty} e^{(s_0-a)t} dt = M \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{(s_0-a)t} dt = \frac{M}{s_0 - a} e^{(s_0-a)t} \Big|_0^A = \frac{M}{s_0 - a} \lim_{A \rightarrow \infty} (e^{(s_0-a)A} - 1),$$

$a > S_0$ болған жағдайда :

$$\frac{M}{s_0 - a} \lim_{A \rightarrow \infty} (e^{(s_0 - a)A} - 1) = \frac{M}{s_0 - a}$$

Осы әдіспен (*) теңдіктегі екінші интегралдың да бар екенін және жинақталатынын дәлелдеуге болады [1].

Осылайша, $a > S_0$ кезінде (2) теңдіктің сол жағында тұрған интеграл да табылады және жинақталады. Бұл интеграл p күрделі параметрі бойынша мына функцияны анықтайды :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (3)$$

$F(p)$ функциясы Лаплас бойынша $f(t)$ функциясының бейнесі деп аталады, ал $f(t)$ функциясы $F(p)$ - ге қатысты түпнұсқа деп аталады.

$f(t) \Leftarrow F(p)$, мұндағы $F(p)$ – Лаплас бойынша $f(t)$ функциясының бейнесі. $L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ - бұл Лаплас операторы.

Интегралдық түрлендірулерді енгізудің мәнін қарастырайық.

Кескін аймағына көшу арқылы көптеген мәселелерді шешуді жеңілдетуге болады, атап айтқанда дифференциалдық, интегралдық және интегро-дифференциалдық теңдеудің көптеген мәселелерін шешу мәселесін алгебралық теңдеулерді шешуге дейін азайтуға болады.

Теорема (жалғыздық). Егер екі функцияның $\varphi(t)$, $\Psi(t)$ кескіні бірдей $F(p)$ болса, онда бұл функциялар өз ара тең болады.

Теореманың мәні: егер мәселені шешу кезінде біз қалаған функцияның бейнесін анықтасақ, содан кейін кескіннен түпнұсқаны тапсақ, онда жалғыздық теоремасының негізінде табылған функция түпнұсқа саласындағы жалғыз шешім деп айтуға болады.

Енді $\sigma_0(t)$, $\sin(t)$, $\cos(t)$ функциялар кескінін қарастырайық.

Анықтама. $\sigma_0(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$ функциясы бірлік функция деп аталады.

Бірлік функция Лаплас бойынша кескіні болуы үшін осы функцияға қойылатын талаптарды қанағаттандырады. Бұл кескінді табыңыз :

$$L[\sigma_0(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sigma_0(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-pt} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-pA}}{p} + \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p}.$$

Сонымен, бірлік функциясының кескіні: $\sigma_0(t) \Leftarrow \frac{1}{p}$.

Дәл осылай талдай отырып, $\sin(t)$ функциясының кескінін аламыз :

$$L[\sin(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} \sin(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-pt} \sin(t) dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{-pt} & v = \cos t \\ du = -pe^{-pt} & dv = \sin(t) dt \end{array} \right\} =$$

(бөліктеп интегралдау арқылы есептейміз)

$$= -e^{-pt} \cos(t) - p \int e^{-pt} \cos(t) dt = \frac{1}{p^2 + 1}, \text{ яғни } \sin(t) \Leftarrow \frac{1}{p^2 + 1} \text{ аламыз.}$$

Сол сияқты, $\cos(t)$ түрлендіру саласындағы $\frac{p}{p^2 + 1}$ функцияға өтетінін

дәлелдеуге болады. Бұдан $\cos(t) \Leftarrow \frac{p}{p^2 + 1}$.

Тәуелсіз айнымалылы масштабы өзгертілген функцияның кескіні

$$L[f(at)] = \frac{a}{a} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(at) d(at) = \left\{ \begin{array}{l} z = at \\ dz = a dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-p \frac{z}{a}} f(z) d(z) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right),$$

мұндағы a -тұрақты.

Осылайша : $f(at) \Leftarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$, $\sin(at) \Leftarrow \frac{a}{p^2 + a^2}$ және $\cos(at) \Leftarrow \frac{p}{p^2 + a^2}$.

Кескін сызықтығының қасиеттерін қарастырайық.

Теорема. Тұрақтыға көбейтілген бірнеше функциялардың қосындысының кескіні сол тұрақтыға көбейтілген осы функциялардың кескіндерінің

қосындысына тең: $f(t) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(t)$

Егер $f(t) \Leftarrow F(p)$, онда $F(p) = \sum_{i=1}^n C_i F_i(p)$, мұндағы $F_i(p) \Rightarrow f_i(t)$.

Пайдаланылған дерек көздері

1. Паровик Р.И. Интегральные преобразования и их приложения: учебное пособие. КамГУ им.Витуса Беринга. 2014.-272 с.