ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Жунисбекова Д.А.
Южно-Казахстанский университет им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

Одной из наиболее интересных в теме «Матрицы» является решение задач на вычисление обратной матрицы. Для этого приведем несколько основных определений и формул данного раздела.

Квадратная матрица называется **обратной** к квадратной матрице А того же порядка, если:

$$A \cdot A^{-1} = E \quad \text{или} \quad A^{-1} \cdot A = E.$$

при этом обратная матрица обозначается A^{-1}.

Теорема. Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы исходная матрица была невырожденной.

Обратная матрица третьего порядка вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij}.

Пусть дана матрица размера 3 х 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

причем

$$\Delta = |A| = \det A \neq 0.$$

Матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

такая, что

$$A\cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} = \Delta\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Delta\cdot E,$$

или

$$A\cdot A^* = \Delta\cdot E.$$

По аналогии,

$$A^*\cdot A = \Delta\cdot E.$$

Перепишем эти уравнения следующим образом:

$$A\cdot\frac{A^*}{\Delta} = E \quad \text{и} \quad \frac{A^*}{\Delta}\cdot A = E.$$

Значит, получим следующее:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta},$$

или

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Например, найдем обратную матрицу A^{-1} матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение: Первое найдем определитель

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

По формуле обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

найдем:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-1; \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6 & 4\\ 5 & -3\end{vmatrix}=38;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}6 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-27; \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5 & 7\\ -2 & -3\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 7\\ 5 & -3\end{vmatrix}=-41; \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 5 & -2\end{vmatrix}=29;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5 & 7\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-1; \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 7\\ 6 & 4\end{vmatrix}=34;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & 3\end{vmatrix}=-24.$$

Имеем:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 38 & -41 & 34\\ -27 & 29 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Литература

1.Жунисбекова Д.А., Утенов Н.М. Конспект лекций по дисциплине «Алгебра и геометрия».- Шымкент: ЮКУ им.М.Ауэзова, 2020. – 104 с.

2.Жунисбекова Д.А. Методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Алгебра и геометрия» - Шымкент: ЮКУ им.М.Ауезова, 2020. – 80 с.

3.Шапкин А.С., Шапкин В.А. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, мат.моделированию. – М., 2010. – 274 с.

4.Высшая математика для экономистов: Учебник / Под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: Юнити, 2014. - 479 с.