

Оқушыларды туынды түсінігіне үйрету

Дифференциалдық есептеу – математикалық талдаудың бір саласы, негізінен функцияның туындысы және дифференциалы ұғымдарымен байланысты. Дифференциалдық есепте туындыларды есептеу ережелері (дифференциалдау заңдары) және туындыларды функциялардың қасиеттерін зерттеуге қолдану зерттеледі.

Дифференциалдық есептеудің орталық ұғымдары — туынды және дифференциал — жаратылыстану және математика мәселелерінің үлкен санын қарастыру кезінде пайда болды, бұл бір типті шектерді есептеуге әкелді. Олардың ішіндегі ең маңыздылары біркелкі емес қозғалыс жылдамдығын анықтаудың физикалық есебі және қисыққа жанама салудың геометриялық есептері. Солардың бірін егжей-тегжейлі қарастырайық.

Денелердің еркін түсу заңын зерттеу үшін итальян ғалымы Г.Галилейге ілесеміз. Бір тасты көтеріп, содан кейін оны тыныштық күйінен босатайық. Күздің басынан бастап есептелген уақыт t болсын; а $s(t)$ — t моменті жүріп өткен қашықтық. Галилео $s(t)$ тәуелділігінің келесі қарапайым түрі бар екенін тәжірибе жүзінде анықтады:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

мұндағы t секундпен берілген уақыт және g — шамасы $9,8 \text{ м/с}^2$ тең физикалық тұрақты.

Еркін түсетін дененің қозғалысы біркелкі емес екені анық. Құлау жылдамдығы v біртіндеп артады. Бірақ $v(t)$ тәуелділігі дәл қалай көрінеді? $s(t)$ тәуелділігін білу анық, яғни. құлап жатқан дененің қозғалыс заңы үшін біз, негізінен, уақыт функциясы ретінде $v(t)$ жылдамдығының өрнегін алуымыз керек.

v - жылдамдықтың t -ге тәуелділігін табуға тырысайық. Біз келесідей дәлелдейміз: біз $v(t)$ жылдамдығының мәнін білгіміз келетін t моментін бекітеміз. h t - моментінен өткен шағын уақыт аралығы болсын. Осы уақыт ішінде құлап жатқан дене $s(t+h) - s(t)$ тең жолды басып өтеді. Егер h уақыт аралығы өте аз болса, онда h уақыт ішіндегі дененің жылдамдығы айтарлықтай өзгеріп үлгермейді, сондықтан h аз болса, онда шамамен

$$s(t+h) - s(t) \approx v(t) \cdot h, \quad (1)$$

немесе

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \approx v(t) \quad (2)$$

сонымен қатар, соңғы жуық теңдік неғұрлым дәл болса, h аз болады (h мәні нөлге жақын). Сонымен, t моментіндегі $v(t)$ жылдамдықтың мәнін шамамен теңдіктің сол жағында тұрған (2) қатынас, t моментінен $t+h$ моментіне дейінгі уақыт аралығындағы орташа жылдамдықты білдіретін, h мәні нөлге ұмтылған кезде қарастыруға болады. Жоғарыда айтылғандар келесі түрде жазылады

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}. \quad (3)$$

Галилео тапқан тәуелділікке сүйене отырып, (3) қатынаста көрсетілген есептеулерді жүргізейік.

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

Алдымен бірнеше қарапайым есептеулер жүргізейік:

$$\begin{aligned} s(t+h) - s(t) &= \frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2 = \\ &= \frac{1}{2}g(t^2 + 2th + h^2) - \frac{1}{2}gt^2 = gth + gh^2 \end{aligned}$$

ал енді h -ке бөлсек, аламыз

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = gt + \frac{1}{2}gh.$$

h нөлге ұмтылғанда, оң жақта жазылған қосындының екінші мүшесі де нөлге ұмтылады, ал біріншісі тұрақты, дәлірек айтқанда, h мәніне тәуелсіз болып қалады, сондықтан

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h} = gt$$

еркін түсетін дененің жылдамдығының өзгеру $v(t) = gt$ заңын тапты. (3) формула $s(t)$ функциясының лездік өзгеру жылдамдығының $v(t)$ мәндерін есептеу ережесін де, анықтамасын да беретінін ескеріңіз.

$v(t)$ жылдамдығының өзі уақыт функциясы болғандықтан, оның өзгеру жылдамдығы туралы сұрақ туындауы мүмкін. Физикада жылдамдықтың өзгеру жылдамдығы үдеу деп аталады. Сонымен, егер $v(t)$ – уақытқа байланысты жылдамдық болса, онда (3) формуланың шығарылымындағыдай дәлелдей отырып, t уақытындағы лездік үдеу үшін $a(t)$ өрнекті аламыз.

$$a(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h},$$

Бұл формула еркін құлау жағдайы үшін не беретінін көрейік, онда есептелгендей $v(t) = gt$:

$$v(t + h) - v(t) = g(t + h) - gt = gh,$$

$$\frac{v(t + h) - v(t)}{h} = g$$

және g тұрақты болғандықтан, (4)-ден $a(t) = g$, яғни еркін түсетін дененің үдеуі тұрақты және g мәні үдеуін өрнектейтін бірдей физикалық тұрақты болып шығады. Жер бетіндегі еркін құлау.

(3), (4) өрнектерінің толық ұқсастығын байқап, айнымалының лездік өзгеру жылдамдығының жалпы математикалық өрнегін тапқанымызды түсіну оңай. Әрине, (3), (4) формулалары бойынша есептеу нәтижесі, біз көргеніміздей, $s(t)$ немесе $v(t)$ функцияларының нақты формасына байланысты, бірақ бұл функциялардың өздеріне жасалған амалдар, олар (3), (4) формулалардың оң жақтарымен белгіленеді.

Математикалық талдауда кез келген $y = f(x)$ функциясы үшін жасалған бақылауларды қорытындылай отырып, маңызды шама қарастырылады:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (5)$$

f функциясының туындысы деп аталады.

Туынды осылайша x тәуелсіз айнымалысының өзгеруіне қатысты тәуелді y айнымалысының өзгеру жылдамдығы рөлін атқарады; соңғысы уақыттың физикалық сезіміне ие болуға міндетті емес.

$f'(x)$ туындысының мәні x аргументінің мәніне байланысты, сондықтан жылдамдық жағдайындағы сияқты, кейбір $f(x)$ функциясының $f'(x)$ туындысының өзі x айнымалысының функциясы болып табылады.

Мысалы, $f(x) = x^3$ болса, онда

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + (3xh + h^2),$$

әрі қарай, h нөлге ұмтылған сайын, соңғы жақшалардағы мән нөлге ұмтылады және бүкіл оң жақ жағы $3x^2$ мәніне ұмтылады. Біз осылай таптық, егер $f(x) = x^3$ болса, онда $f'(x) = 3x^2$.

(5) формулада $(x + h) - x$ айырмасының h мәні функция аргументінің өсімі деп аталады және жиі x символымен белгіленеді, ал $f(x + h) = f(x)$ айырмасы әдетте df арқылы белгіленеді және осы өсу аргументіне сәйкес функцияның өсімі деп аталады. Бұл белгілеулерде (5) өрнек келесі пішінді алады:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

немесе $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$

Сонымен, $f(x)$ функциясының x нүктесіндегі туындысының $f'(x)$ мәні x нүктесінен орын ауыстыруға сәйкес функцияның өсімшесінің x аргументінің өсімшесінің қатынасының шегі болып табылады. нөлге ұмтылған кезде.

Функцияның туындысын табу операциясы дифференциалдау деп аталады. Физикалық тұрғыдан алғанда, біз қазір түсінетініміздей, дифференциация - айнымалының өзгеру жылдамдығын анықтау.

Негізгі элементар функциялардың туындылары дифференциалдық есепте шығарылады. Мысалы, $\sin x$, $\cos x$ функцияларының туындылары сәйкесінше $\cos x$ және $-\sin x$ функциялары екенін атап өтейік.

Дифференциалды есептеуде дифференциалдаудың келесі жалпы ережелері де шығарылады. [1,2]

$$(cf)' = cf' \quad (\text{тұрақты коэффициентті алып тастау});$$

$$(f_1 \pm f_2)' = f_1' \pm f_2' \quad (\text{функциялардың қосындысы мен айырмасын дифференциалдау});$$

$$(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2' \quad (\text{функциялардың туындысын дифференциалдау});$$

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' = \frac{f_1' \cdot f_2 - f_1 \cdot f_2'}{f_2^2} \quad (\text{жеке функцияларды дифференциациялау}).$$

Ақырында, күрделі функцияны дифференциалдау үшін келесі маңызды ереже де дұрыс: егер $y = f(u)$ және $u = \varphi(x)$, онда $f(\varphi(x))$ функциясының туындысы $f(\varphi(x))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ тең болады.

Дифференциалдаудың жалпы заңдары туындыларды іздеуді айтарлықтай жеңілдетеді және кез келген элементар функциялардың комбинациялары үшін дифференциалдау көбейту кестесін білетін адам үшін арифметикалық амалдар сияқты қол жетімді операцияға айналдырады.

Қолданылған әдебиеттері

1. Абілқасымова А.Е., Жұмағұлова З.Ә. Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағытындағы 10-сыныбына оқулық / А.Е. Абілқасымова, З.Ә. Жұмағұлова. - Алматы: Мектеп, 2019. – 152 б.

2. Шыныбеков Ә.Н және т.б. Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық / Ә.Н. Шыныбеков., Д.Ә. Шыныбеков., Р.Н. Жұмабаев. — Алматы: Атамұра, 2019. — 272 бет.